一次元スピン系における振動的モードの存在

蔵　本　由　紀（京大）

Long range order がない場合にもスピン波的モードが存在しうるということを示す簡単なモデルとして一次元 classical Heisenberg スピン系を考える。特に低温（$K_BT \ll J$）領域に限る。ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_i \underline{\underline{S}}_i \underline{\underline{S}}_{i+1} \qquad (J>0) \qquad \text{-------- (1)}$$

運動方程式は

$$\frac{d\underline{\underline{S}}_i}{dt} = J\,\underline{\underline{S}}_i \times (\underline{\underline{S}}_{i+1} + \underline{\underline{S}}_{i-1}) \qquad \text{-------- (2)}$$

さて$\underline{\underline{S}}_i$ を二つの部分に分ける。

$$\underline{\underline{S}}_i = \underline{\underline{\mathcal{S}}}_i + \underline{\underline{\sigma}}_i \,, \qquad \text{-------- (3)}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{S}}}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{Q} (\underline{\underline{S}}_k\ e^{ikr_i} + C.C.),$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=Q}^{\pi} (S_k\, \rho^{ikr_i} + C.C.)$$

つまり$\underline{\underline{\mathcal{S}}}_i$ の部分は空間的にゆるやかに変化するが$\underline{\underline{\sigma}}_i$ の変化は激しい。ところでこの二つの部分の fluctuation の大きさはそれぞれどの様になるかというと低温にゆけばゆくほどQを非常に小さくとっても$\underline{\underline{\mathcal{S}}}_i$ による fluctuation か圧倒的な部分を占めてしまう。実際我々はQを非常に小さく（$\ll \pi$）しかも$\langle (\underline{\underline{\mathcal{S}}}_i)^2 \rangle \gg \langle (\underline{\underline{\sigma}}_i)^2 \rangle$ となるようにとる。$k_BT \ll J$ ではこれが可能なのである。すると(2)は

$$S\frac{d\underline{\underline{\eta}}_i}{dt} + \frac{d\underline{\underline{\sigma}}_i}{dt} \cong JS\,\underline{\underline{\eta}}_i \times (\underline{\underline{\sigma}}_{i+1} + \underline{\underline{\sigma}}_{i-1} - 2\underline{\underline{\sigma}}_i) \,, \text{---(4)}$$

ここに$\underline{\underline{\eta}}_i = \underline{\underline{\mathcal{S}}}_i / |\underline{\underline{\mathcal{S}}}_i|$. $\underline{\underline{\eta}}_i$ が 時間的空間的に一定なら(4)は低温のスピン波

の場合と同様の式ですぐ解けるのだが$\underline{\underline{\eta}}_i$ はゆるやかながらも時間的空間的に変化している。時間的変化がゆるやかになるというのはKinematical slow down による。そこで(7)を巧く扱うにはη_i を常に座標軸のひとつ z' とする様な新しい座標系を考えるとよい。二つの座標系の間の変換をT(i, t)とする。Tはオイラー角で表わされる。
さてあるベクトル$\underline{\underline{A}}$ (i, t)に対し T(i, t)$\underline{\underline{A}}$(i, t)=$\widetilde{A}$(i, t) とかくとTの時間空間変化がゆるやかという近似の下に(4)は

$$\frac{d\underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_i}{dt} \cong JS \ \underline{\underline{\widetilde{\eta}_i}} \times (\underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_{i+1} + \underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_{i-1} - 2\underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_i) \text{ ---------- } (5)$$

となる。$\underline{\underline{\eta}}_i$は実はi, tにはよらないベクトルだから(5)はすぐ解けて

$$\widetilde{\sigma}_k^{\pm}(t) = \widetilde{\sigma}_k^{\pm}(0)\, e^{\mp i\omega_k t}, \text{ ------------------ } (6a)$$

$$\widetilde{\sigma}_k^{o}(t) = \widetilde{\sigma}_k^{o}(0) \cong 0. \text{ -------------------------- } (6b)$$

ここにω_k=S(J(0)−J(k)), J(x)=2Jcosxである。したがって新しい座標系でのCorrelation function $\widetilde{\gamma}^{\pm}(t) = \langle \widetilde{\sigma}_k^{\pm}(t) \widetilde{\sigma}_{-k}^{\mp}(0) \rangle$は

$$\widetilde{\gamma}_k^{\pm}(t) = c\, e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}}\, e^{\mp i\omega_k t}, \text{ ------------------ } (7a)$$

$$\widetilde{\gamma}_k^{o}(t) \cong 0 \text{ ---------------------------------- } (7b)$$

となる。ところが我々が欲しいのはlaboratory frame でのCorrelation function $\gamma^{\pm}(R, t) = \langle \sigma^{\pm}(R, t)\, \sigma^{\mp}(0, 0) \rangle$ だから$\gamma^{\alpha}(R, t)$と$\widetilde{\gamma}^{\alpha}(R, t)$との関れんをつけねばならない。$\underline{\underline{\sigma}}_i(t)$ と$\underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_i(t)$ の関れんは

$$\underline{\underline{\sigma}}_i(t) = T^*(i, t)\ \underline{\underline{\widetilde{\sigma}}}_i(t)$$

であるからこれをもとにして

$$\gamma^{+}(R,\ t) \cong \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma^{\circ}(R,\ t)}{S^{2}}+1\right)\left(\tilde{\gamma}^{+}(R,\ t)+\tilde{\gamma}^{-}(R,\ t)\right) \quad \text{-----} (8)$$

が得られる。ここに

$$\Gamma^{\circ}(R,\ t)=\langle S^{z}(R,\ t)\,S^{z}(0,\ 0)\rangle$$

である。(8)より$\gamma^{+}(R,\ t)$の space−time フーリエ変換$\gamma^{+}_{k,\omega}$の実部を調べてみると$\omega=\pm\omega_{k}$に peak があり$\Gamma^{\circ}(R,\ t)$かかかっていることから来る巾をもっている。その巾△は△～S J Q sink となるか低温においてはQ≪ πだから△≪ ω_{k}となり二つの peak ははっきり分かれて見える。なお$\gamma^{-}_{k,\omega}$, $\gamma^{\circ}_{k,\omega}$についても結果は全く同じであるかこれは空間的なる方向の同等性（paramagnetic phase だから）によって当然予想されることである。